第　1　問

正の実数 k および $\alpha < \beta$ となる実数 α, β が次の条件を満たすように動く。

条件：　座標平面上の放物線 $C\colon y = k(x-\alpha)(\beta - x)$ の頂点は $(-3, 1)$ であり，C は y 軸と $-2 \leqq y \leqq 0$ の範囲で交わる。

このとき，C と x 軸で囲まれる図形の面積 S のとりうる値の範囲を求めよ。

第　2　問

n を正の整数とする。座標平面上の $3n$ 個の点がなす集合

$$\{(x, y) \mid x,\ y \text{ は } 1 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq n \text{ を満たす整数}\}$$

から相異なる 3 点を選ぶ。ただし，どの 3 点も等確率で選ばれるものとする。選んだ 3 点が三角形の 3 頂点となる確率を p_n とする。

(1) p_5 を求めよ。

(2) m を 2 以上の整数とする。p_{2m} を求めよ。

第　3　問

$0 < a < 1$ とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{a}{8}(x-1)^2 + \frac{2}{a} - 3$$

と定める。

また，関数 $g(x)$ を次のように定める。整数 n に対し，

$$\begin{array}{ll} 2n \leqq x < 2n+1 \text{ のとき} & g(x) = x - 2n \\ 2n+1 \leqq x < 2n+2 \text{ のとき} & g(x) = -x + 2n + 2 \end{array}$$

とする。

(1) $x \geqq 4$ において $f(x) > g(x)$ を示せ。

(2) $\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{2}{3}$ とする。座標平面上の $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの $x \geqq 0$ の範囲における共有点の個数を求めよ。

第　4　問

k を実数とし，座標平面上の曲線 C を $y = x^3 - kx$ で定める。C 上の 2 点 P, Q に対する以下の条件 $(*)$ を考える。

条件 $(*)$　原点 O，点 P，点 Q は相異なり，C の O, P, Q における接線のうち，どの 2 本も交わり，そのなす角はすべて $\dfrac{\pi}{3}$ となる。

ただし，2 直線のなす角は 0 以上 $\dfrac{\pi}{2}$ 以下の範囲で考えるものとする。

(1) $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{6}$ とする。$\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ を $\tan\theta$ を用いて表せ。

(2) 条件 $(*)$ を満たす P, Q が存在するような k の範囲を求めよ。

(3) k が (2) で定まる範囲にあるとする。P, Q が条件 $(*)$ を満たすように動くとき，C の O, P, Q における接線によって囲まれる三角形の面積 S の最大値を M，最小値を m とおく。ただし，3 本の接線が 1 点で交わるときは $S = 0$ とする。$M = 4m$ となる k の値を求めよ。