

数 学 I

(全問必答)

第1問 (配点 20)

〔1〕 不等式

$$n < 2\sqrt{13} < n + 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす整数 n は である。実数 a, b を

$$a = 2\sqrt{13} - \text{ア} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$b = \frac{1}{a} \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

で定める。このとき

$$b = \frac{\text{イ} + 2\sqrt{13}}{\text{ウ}} \quad \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

である。また

$$a^2 - 9b^2 = \text{エオカ} \sqrt{13}$$

である。

(数学 I 第 1 問は次ページに続く。)

①から

$$\frac{\boxed{\text{ア}}}{2} < \sqrt{13} < \frac{\boxed{\text{ア}} + 1}{2} \dots\dots\dots \text{⑤}$$

が成り立つ。

太郎さんと花子さんは、 $\sqrt{13}$ について話している。

太郎：⑤から $\sqrt{13}$ のおよその値がわかるけど、小数点以下はよくわからないね。

花子：小数点以下をもう少し詳しく調べることができないかな。

①と④から

$$\frac{m}{\boxed{\text{ウ}}} < b < \frac{m + 1}{\boxed{\text{ウ}}}$$

を満たす整数 m は **キク** となる。よって、③から

$$\frac{\boxed{\text{ウ}}}{m + 1} < a < \frac{\boxed{\text{ウ}}}{m} \dots\dots\dots \text{⑥}$$

が成り立つ。

$\sqrt{13}$ の整数部分は **ケ** であり、②と⑥を使えば $\sqrt{13}$ の小数第 1 位の数字は **コ**，小数第 2 位の数字は **サ** であることがわかる。

(数学 I 第 1 問は次ページに続く。)

数学 I

〔2〕 全体集合 U を 2 以上 9 以下の自然数全体の集合とする。 a, b, c, d は U の異なる要素とする。また、 U の部分集合 A, B, C, D を

$$A = \{n \mid n \text{ は } U \text{ の要素かつ } a \text{ の倍数}\}$$

$$B = \{n \mid n \text{ は } U \text{ の要素かつ } b \text{ の倍数}\}$$

$$C = \{n \mid n \text{ は } U \text{ の要素かつ } c \text{ の倍数}\}$$

$$D = \{n \mid n \text{ は } U \text{ の要素かつ } d \text{ の倍数}\}$$

とする。

なお、 $A \cup B \cup C$ とは、 $(A \cup B) \cup C$ のことであり、 $A \cup B \cup C \cup D$ とは、 $(A \cup B \cup C) \cup D$ のことである。

(1) $a = 4, b = 5$ のとき

$$A \cup B = \{ \boxed{\text{シ}}, \boxed{\text{ス}}, \boxed{\text{セ}} \}$$

である。ただし、 $\boxed{\text{シ}} < \boxed{\text{ス}} < \boxed{\text{セ}}$ とする。

(2) $a = 2, b = 3$ のとき

$$A \cap \bar{B} = \{ \boxed{\text{ソ}}, \boxed{\text{タ}}, \boxed{\text{チ}} \}$$

である。ただし、 $\boxed{\text{ソ}} < \boxed{\text{タ}} < \boxed{\text{チ}}$ とする。

(数学 I 第 1 問は次ページに続く。)

(3) 以下, $a < b < c < d$ とする。

(i) $a = 2, b = 3$ のとき, $A \cup B = \bar{C} \cap \bar{D}$ が成り立つのは,

$c =$, $d =$ のときである。

(ii) $A \cup B \cup C \cup D = U$ が成り立つのは, $a =$, $b =$,

$c =$, $d =$ のときである。

(iii) $a = 2$ であることは, $\{2, 6, 8\} \subset A \cup B \cup C$ であるための

ための

, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- ① 必要条件であるが, 十分条件ではない
- ② 十分条件であるが, 必要条件ではない
- ③ 必要十分条件である
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

数学 I

第 2 問 (配点 30)

〔1〕 $\triangle ABC$ において、 $BC = 5$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ とする。

- (1) $\triangle ABC$ の外接円の半径が $\sqrt{7}$ のとき、 $AC = \sqrt{\text{アイ}}$ であり、
 $AB = \text{ウ}$ または $AB = \text{エ}$ である。ただし、 ウ ， エ
の解答の順序は問わない。

したがって、外接円の半径が $\sqrt{7}$ であるような $\triangle ABC$ は二つある。

(数学 I 第 2 問は次ページに続く。)

(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とするとき、 $R = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ または

$R \cong \frac{\boxed{\text{キ}} \sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ であることは、 $\triangle ABC$ が一通りに決まるための

必要十分条件である。

(数学 I 第 2 問は次ページに続く。)

数学 I

〔2〕 以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 15 ページの三角比の表を用いてもよい。

水平な地面(以下，地面)に垂直に立っている電柱の高さを，その影の長さ
と太陽高度を利用して求めよう。

(数学 I 第 2 問は次ページに続く。)

数学 I

図1のように、電柱の影の先端は坂の斜面(以下、坂)にあるとする。また、坂には傾斜を表す道路標識が設置されていて、そこには7%と表示されているとする。

電柱の太さと影の幅は無視して考えるものとする。また、地面と坂は平面であるとし、地面と坂が交わってできる直線を l とする。

電柱の先端を点 A とし、根もとを点 B とする。電柱の影について、地面にある部分を線分 BC とし、坂にある部分を線分 CD とする。線分 BC 、 CD がそれぞれ l と垂直であるとき、電柱の影は坂に向かってまっすぐにのびているということにする。

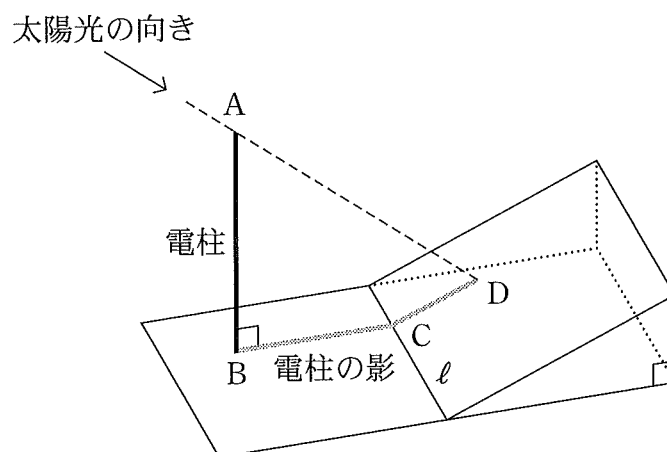


図 1

(数学 I 第 2 問は次ページに続く。)

数学 I

電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびているとする。このとき、4点 A, B, C, D を通る平面は l と垂直である。その平面において、図 2 のように、直線 AD と直線 BC の交点を P とすると、太陽高度とは $\angle APB$ の大きさのことである。

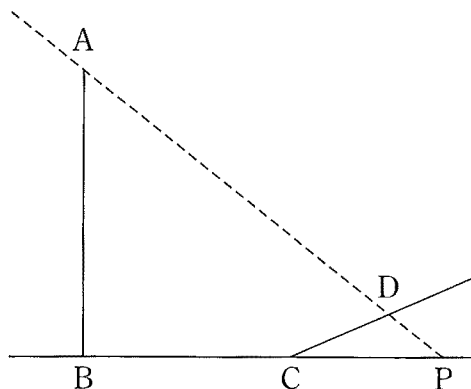


図 2

道路標識の 7% という表示は、この坂をのぼったとき、100 m の水平距離に対して 7 m の割合で高くなることを示している。 n を 1 以上 9 以下の整数とすると、坂の傾斜角 $\angle DCP$ の大きさについて

$$n^\circ < \angle DCP < n^\circ + 1^\circ$$

を満たす n の値は である。

以下では、 $\angle DCP$ の大きさは、ちょうど $^\circ$ であるとする。

(数学 I 第 2 問は次ページに続く。)

数学 I

ある日、電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびていたとき、影の長さを調べたところ $BC = 7 \text{ m}$ 、 $CD = 4 \text{ m}$ であり、太陽高度は $\angle APB = 45^\circ$ であった。点 D から直線 AB に垂直な直線を引き、直線 AB との交点を E とするとき

$$BE = \boxed{\text{サ}} \times \boxed{\text{シ}} \text{ m}$$

であり

$$DE = \left(\boxed{\text{ス}} + \boxed{\text{セ}} \times \boxed{\text{ソ}} \right) \text{ m}$$

である。よって、電柱の高さは、小数第 2 位で四捨五入すると $\boxed{\text{タ}}$ m であることがわかる。

$\boxed{\text{シ}}$ 、 $\boxed{\text{ソ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| ① $\sin \angle DCP$ | ② $\frac{1}{\sin \angle DCP}$ | ③ $\cos \angle DCP$ |
| ④ $\frac{1}{\cos \angle DCP}$ | ⑤ $\tan \angle DCP$ | ⑥ $\frac{1}{\tan \angle DCP}$ |

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

- | | | |
|--------|--------|--------|
| ① 10.4 | ② 10.7 | ③ 11.0 |
| ④ 11.3 | ⑤ 11.6 | ⑥ 11.9 |

(数学 I 第 2 問は次ページに続く。)

数学 I

別の日、電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびていたときの太陽高度は $\angle APB = 42^\circ$ であった。電柱の高さがわかったので、前回調べた日からの影の長さの変化を知ることができる。電柱の影について、坂にある部分の長さは

$$CD = \frac{AB - \boxed{\text{チ}} \times \boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}} + \boxed{\text{ト}} \times \boxed{\text{ツ}}} \text{ m}$$

である。 $AB = \boxed{\text{タ}}$ m として、これを計算することにより、この日の電柱の影について、坂にある部分の長さは、前回調べた 4 m より約 1.2 m だけ長いことがわかる。

$\boxed{\text{ツ}}$ ~ $\boxed{\text{ト}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| ① $\sin \angle DCP$ | ④ $\cos \angle DCP$ | ② $\tan \angle DCP$ |
| ③ $\sin 42^\circ$ | ⑤ $\cos 42^\circ$ | ⑤ $\tan 42^\circ$ |

(数学 I 第 2 問は次ページに続く。)

三角比の表

角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)	角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	—

数学 I

第 3 問 (配点 30)

〔1〕 関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ について、 $y = f(x)$ のグラフをコンピュータソフトを用いて表示させる。ただし、このコンピュータソフトでは、 a, b, c の値は十分に広い範囲で変化させられるものとする。

a, b, c の値をそれぞれ定めたところ、図 1 のように、 x 軸の $-2 < x < -1$ の部分と $-1 < x < 0$ の部分のそれぞれと交わる、上に凸の放物線が表示された。

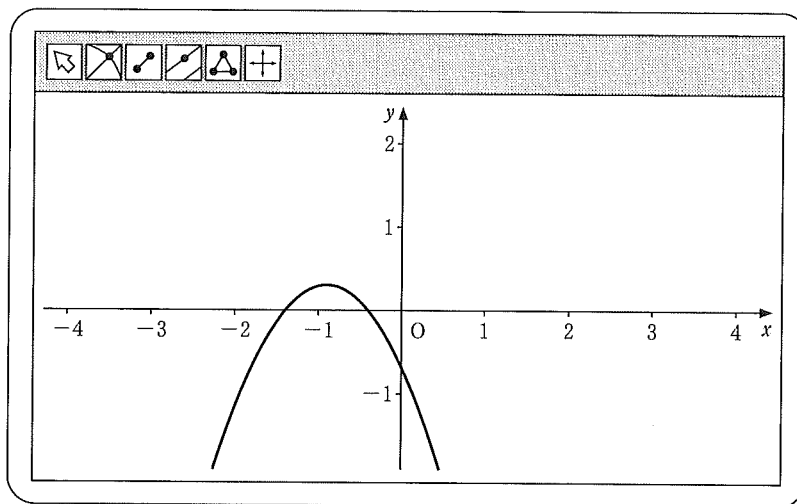


図 1

(1) 図 1 の放物線を表示させる a, b, c の値について

$$a \boxed{\text{ア}} 0, \quad b \boxed{\text{イ}} 0, \quad c \boxed{\text{ウ}} 0, \quad b^2 - 4ac \boxed{\text{エ}} 0,$$

$$4a - 2b + c \boxed{\text{オ}} 0, \quad a - b + c \boxed{\text{カ}} 0$$

である。

$\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{カ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

① <	① =	② >
-----	-----	-----

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

(2) 次の操作 A, 操作 B, 操作 C のうち, いずれか一つの操作を行う。

操作 A : 図 1 の状態から b, c の値は変えず, a の値だけを減少させる。

操作 B : 図 1 の状態から a, c の値は変えず, b の値だけを減少させる。

操作 C : 図 1 の状態から a, b の値は変えず, c の値だけを減少させる。

このとき, 操作 A, 操作 B, 操作 C のうち

不等式 $f(x) < 0$ の解が, すべての実数となること

が起り得る操作は 。また

方程式 $f(x) = 0$ は, 異なる二つの正の解をもつこと

が起り得る操作は 。

,

 の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- ① ない
- ② 操作 A だけである
- ③ 操作 B だけである
- ④ 操作 C だけである
- ⑤ 操作 A と操作 B だけである
- ⑥ 操作 A と操作 C だけである
- ⑦ 操作 B と操作 C だけである
- ⑧ 操作 A と操作 B と操作 C のすべてである

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

数学 I

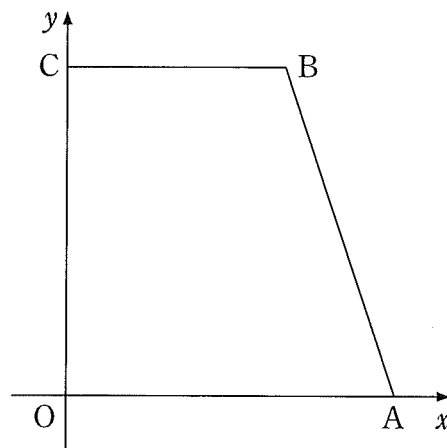
- 〔2〕 座標平面上に4点 $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(4, 6)$, $C(0, 6)$ を頂点とする台形 $OABC$ がある。また、この座標平面上で、点 P , Q は次の規則に従って移動する。

規則

- P は、 O から出発して毎秒1の一定の速さで x 軸上を正の向きに A まで移動し、 A に到達した時点で移動を終了する。
- Q は、 C から出発して y 軸上を負の向きに O まで移動し、 O に到達した後は y 軸上を正の向きに C まで移動する。そして、 C に到達した時点で移動を終了する。ただし、 Q は毎秒2の一定の速さで移動する。
- P , Q は同時刻に移動を開始する。

この規則に従って P , Q が移動するとき、 P , Q はそれぞれ A , C に同時刻に到達し、移動を終了する。

以下において、 P , Q が移動を開始する時刻を**開始時刻**、移動を終了する時刻を終了時刻とする。



参考図

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

- (1) 開始時刻から 1 秒後の $\triangle PBQ$ の面積は である。
- (2) 開始時刻から 3 秒間の $\triangle PBQ$ の面積について、面積の最小値は であり、最大値は である。
- (3) 開始時刻から終了時刻までの $\triangle PBQ$ の面積について、面積の最小値は であり、最大値は である。
- (4) 開始時刻から終了時刻までの $\triangle PBQ$ の面積について、面積が 10 以下となる時間は $(\text{タ} - \sqrt{\text{チ}} + \sqrt{\text{ツ}})$ 秒間である。

数学 I

第 4 問 (配点 20)

高校の陸上部で長距離競技の選手として活躍する太郎さんは、長距離競技の公認記録が掲載されている Web ページを見つけた。この Web ページでは、各選手における公認記録のうち最も速いものが掲載されている。その Web ページに掲載されている、ある選手のある長距離競技での公認記録を、その選手のその競技でのベストタイムということにする。

なお、以下の図や表については、ベースボール・マガジン社「陸上競技ランキング」の Web ページをもとに作成している。

- (1) 太郎さんは、男子マラソンの日本人選手の 2022 年末時点でのベストタイムを調べた。その中で、2018 年より前にベストタイムを出した選手と 2018 年以降にベストタイムを出した選手に分け、それぞれにおいて速い方から 50 人の選手のベストタイムをデータ A, データ B とした。

ここでは、マラソンのベストタイムは、実際のベストタイムから 2 時間を引いた時間を秒単位で表したものとする。例えば 2 時間 5 分 30 秒であれば、 $60 \times 5 + 30 = 330$ (秒) となる。

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

(i) 図 1 と図 2 はそれぞれ、階級の幅を 30 秒とした A と B のヒストグラムである。なお、ヒストグラムの各階級の区間は、左側の数値を含み、右側の数値を含まない。

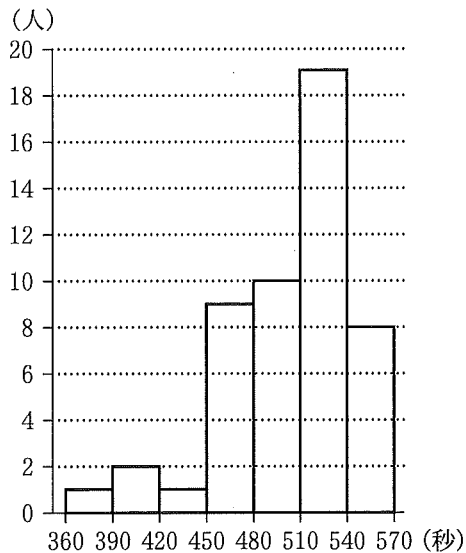


図 1 A のヒストグラム

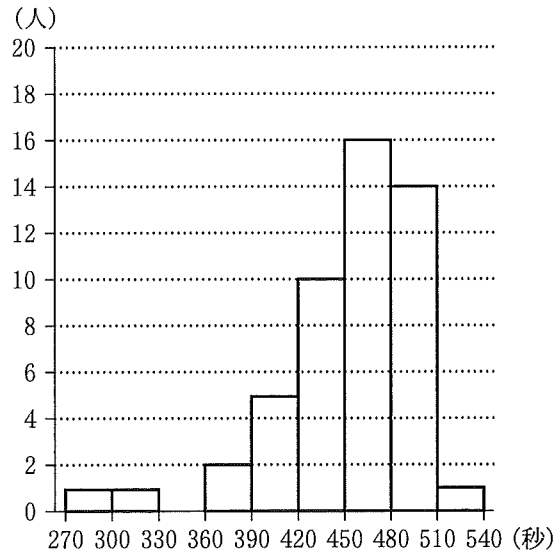


図 2 B のヒストグラム

ベストタイムが 420 秒未満の選手の割合は A では % であり、B では % である。

図 1 から A の最頻値は階級 の階級値である。また、図 2 から B の中央値が含まれる階級は である。

,

- | | |
|-----------------|-----------------|
| ① 270 以上 300 未満 | ① 300 以上 330 未満 |
| ② 330 以上 360 未満 | ② 360 以上 390 未満 |
| ③ 390 以上 420 未満 | ③ 420 以上 450 未満 |
| ④ 450 以上 480 未満 | ④ 480 以上 510 未満 |
| ⑤ 510 以上 540 未満 | ⑤ 540 以上 570 未満 |

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

数学 I

- (ii) 図 3 は、A、B それぞれの箱ひげ図を並べたものである。ただし、中央値を示す線は省いている。

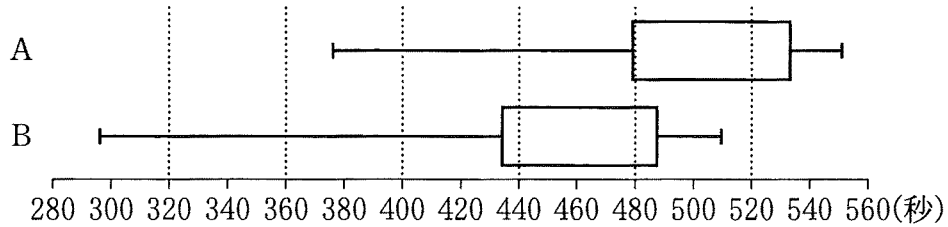


図 3 A と B の箱ひげ図

図 3 より次のことが読み取れる。ただし、A、B それぞれにおける、速い方から 13 番目の選手は、一人ずつとする。

- B の速い方から 13 番目の選手のベストタイムは、A の速い方から 13 番目の選手のベストタイムより、およそ 秒速い。
- A の四分位範囲から B の四分位範囲を引いた差の絶対値は である。

については、最も適当なものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

- ① 5 ② 15 ③ 25 ④ 35 ⑤ 45 ⑥ 55

の解答群

- ① 0 以上 20 未満
 ② 20 以上 40 未満
 ③ 40 以上 60 未満
 ④ 60 以上 80 未満
 ⑤ 80 以上 100 未満

(数学 I 第 4 問は 24 ページに続く。)

数学 I

- (iii) 太郎さんは、A のある選手と B のある選手のベストタイムの比較において、その二人の選手のベストタイムが速いか遅いかとは別の観点でも考えるために、次の式を満たす z の値を用いて判断することにした。

式

$$\begin{aligned} (\text{あるデータのある選手のベストタイム}) = \\ (\text{そのデータの平均値}) + z \times (\text{そのデータの標準偏差}) \end{aligned}$$

二人の選手それぞれのベストタイムに対する z の値を比較し、その値の小さい選手の方が優れていると判断する。

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

表 1 は、A, B それぞれにおける、速い方から 1 番目の選手(以下、1 位の選手)のベストタイムと、データの平均値と標準偏差をまとめたものである。

表 1 1 位の選手のベストタイム, 平均値, 標準偏差

データ	1 位の選手のベストタイム	平均値	標準偏差
A	376	504	40
B	296	454	45

式と表 1 を用いると、B の 1 位の選手のベストタイムに対する z の値は

$$z = - \boxed{\text{ク}} . \boxed{\text{ケコ}}$$

である。このことから、B の 1 位の選手のベストタイムは、平均値より標準偏差のおよそ $\boxed{\text{ク}} . \boxed{\text{ケコ}}$ 倍だけ小さいことがわかる。

A, B それぞれにおける、1 位の選手についての記述として、次の①~③のうち、正しいものは $\boxed{\text{サ}}$ である。

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

- ① ベストタイムで比較すると A の 1 位の選手の方が速く、 z の値で比較すると A の 1 位の選手の方が優れている。
- ② ベストタイムで比較すると B の 1 位の選手の方が速く、 z の値で比較すると B の 1 位の選手の方が優れている。
- ③ ベストタイムで比較すると A の 1 位の選手の方が速く、 z の値で比較すると B の 1 位の選手の方が優れている。
- ④ ベストタイムで比較すると B の 1 位の選手の方が速く、 z の値で比較すると A の 1 位の選手の方が優れている。

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

数学 I

(2) 太郎さんは、マラソン、10000 m、5000 m のベストタイムに関連がないかを調べることにした。そのために、2022 年末時点でのこれら 3 種目のベストタイムをすべて確認できた日本人男子選手のうち、マラソンのベストタイムが速い方から 50 人を選んだ。

図 4 と図 5 はそれぞれ、選んだ 50 人についてのマラソンと 10000 m のベストタイム、5000 m と 10000 m のベストタイムの散布図である。ただし、5000 m と 10000 m のベストタイムは秒単位で表し、マラソンのベストタイムは(1)の場合と同様、実際のベストタイムから 2 時間を引いた時間を秒単位で表したものとする。なお、これらの散布図には、完全に重なっている点はない。

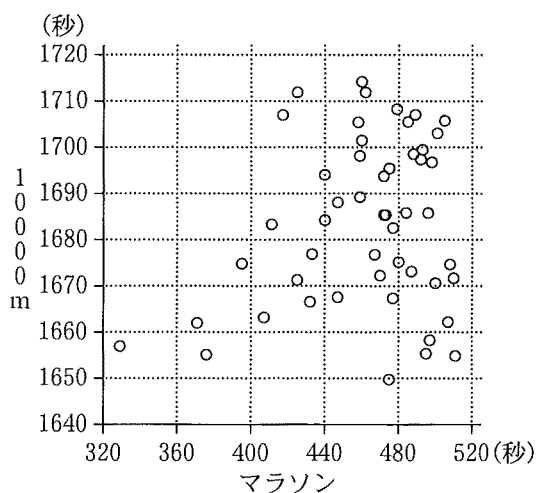


図 4 マラソンと 10000 m の散布図

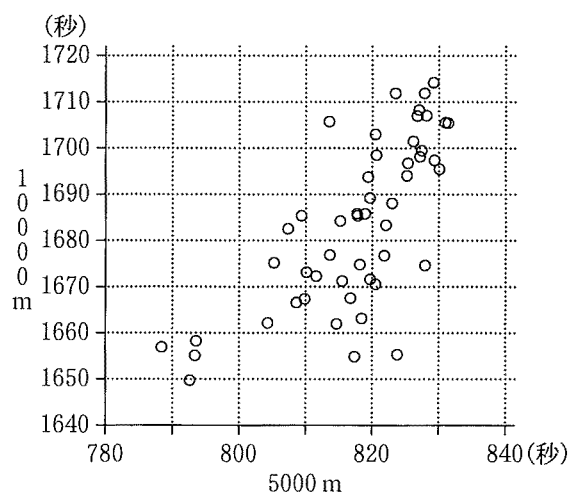


図 5 5000 m と 10000 m の散布図

(i) 次の(a), (b)は、図 4 と図 5 に関する記述である。

(a) マラソンのベストタイムの速い方から 3 番目までの選手の 10000 m のベストタイムは、3 選手とも 1670 秒未満である。

(b) マラソンと 10000 m の間の相関は、5000 m と 10000 m の間の相関より強い。

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

(a), (b) の正誤の組合せとして正しいものは である。

の解答群

	①	②	③	④
(a)	正	正	誤	誤
(b)	正	誤	正	誤

(ii) 太郎さんは、5000 m と 10000 m の相関係数を計算するために、表 2 のように平均値、標準偏差および共分散を算出した。ただし、共分散は各選手の、5000 m のベストタイムの偏差と 10000 m のベストタイムの偏差との積の平均値である。

表 2 5000 m と 10000 m の平均値、標準偏差、共分散

	平均値	標準偏差	共分散
5000 m	817.7	10.3	131.8
10000 m	1683.6	17.9	

表 2 を用いると、5000 m と 10000 m の相関係数は である。

については、最も適当なものを、次の①～⑩のうちから一つ選べ。

① 0.00	② 0.11	③ 0.20	④ 0.31	⑤ 0.45
⑥ 0.58	⑦ 0.65	⑧ 0.71	⑨ 0.80	⑩ 1.40