問１　次の各問に答えよ。答のみ解答欄に記入せよ。

（１）　20220 の正の約数の個数を求めよ。

（２）　大中小 3 個のさいころを同時に投げ，出た目をそれぞれ X, Y, Z とする。このとき，$\log_3\left(\frac{XY}{Z}\right)$ が整数となる確率を求めよ。

（３）　xy 平面上の放物線 $y=x^2$ を C とし，異なる 2 点で C と交わる直線 $y=ax+b$ を ℓ とする。C と ℓ で囲まれた図形の面積が $\frac{4}{3}$ であるとき，2 つの交点の中点 (X, Y) の軌跡の式を求めよ。

問２　面積が 1 である $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部の点 P について，等式 $3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+x\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2x\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ $(x>0)$ が成り立つとする。ある数 k $(0<k<1)$ について $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を満たす線分 BC 上の点を D とする。次の各問に答えよ。答のみ解答欄に記入せよ。

（１）　ある数 l $(0<l<1)$ について $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=l\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が成り立つ。l の値を求めよ。

（２）　$\triangle\mathrm{PCA}$ の面積を t とするとき，$\triangle\mathrm{PAB}$, $\triangle\mathrm{PBC}$ の面積を t の式で表せ。

（３）　3 つの三角形 $\triangle\mathrm{PCA}$, $\triangle\mathrm{PAB}$, $\triangle\mathrm{PBC}$ の面積の積が最大となるときの x の値を求めよ。

問 3　性能の相異なるジュース製造機が全部で n 台ある。1 台目を使って x L（リットル）のジュースを製造すると x^2 円の費用が掛かり，2 台目を使って x L のジュースを製造すると $2x^2$ 円の費用が掛かる。以下，同様にして，k 台目の製造機を使って x L のジュースを製造すると $2^{k-1}x^2$ 円の費用が掛かる（$k = 2, 3, \cdots\cdots, n$）。以下の空欄 $\boxed{\text{あ}}$ ～ $\boxed{\text{か}}$ に当てはまる数または数式を求めよ。答のみ解答欄に記入せよ。

（1）　1 台目と 2 台目の製造機のみを使って合計 x L のジュースを製造するとき，必要となる費用の最小額を計算したい。1 台目を使って t L（$0 \leqq t \leqq x$）のジュースを製造し，2 台目を使って残りの $(x-t)$ L のジュースを製造するとき，必要となる費用の総額を t を含む式として表せば $\boxed{\text{あ}}$ 円となる。この値が最小になるように t の値を選べば，その結果として，費用の総額の最小値は $\boxed{\text{い}}$ x^2 円となる。

（2）　1 台目，2 台目，3 台目の製造機を使って合計 x L のジュースを製造する。1 台目と 2 台目を使って合計 t L（$0 \leqq t \leqq x$）のジュースを製造し，3 台目を使って残りの $(x-t)$ L のジュースを製造するとき，必要となる費用の総額の最小値を t を含む式として表せば $\boxed{\text{う}}$ 円となる。この値が最小になるように t の値を選べば，その結果として，費用の総額の最小値は $\boxed{\text{え}}$ x^2 円となる。

（3）　1 台目から k 台目までの製造機を使って合計 x L のジュースを製造するときに必要な費用の総額の最小値が $a_k x^2$ 円に等しいとき，a_k と a_{k-1} のあいだには $a_k = \boxed{\text{お}}$ という関係がある。これを利用すれば，n 台すべての製造機を使って合計 x L のジュースを製造するときに必要な費用の総額の最小値が $\boxed{\text{か}}$ x^2 円となることが分かる。

問4　xy 平面上の異なる 2 つの曲線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = ax^2 + bx + ab\ (a \neq 0)$ について，次の各問に答えよ。

（1）　$b \neq 0$ であるとき，C_1 と C_2 の両方に接する直線 (共通接線) がただ 1 つ存在するための a, b についての必要十分条件を求めよ。

（2）　C_1 と C_2 の共通接線が 1 つ以上存在するとき，点 (a, b) の存在する領域を解答欄の ab 平面上に図示せよ。

〔以　下　余　白〕