

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ

〔1〕 a を定数とする。 x についての方程式

$$(2^x - 3^x) \left(\frac{3}{2^x} - \frac{2}{3^x} \right) = a \cdots \cdots \text{①} \text{ を考える。}$$

$X = \left(\frac{2}{3} \right)^x$ とおくと、方程式①は X を用いて

$$\text{ア} \quad X + \frac{\text{イ}}{X} + a = \text{ウ} \cdots \cdots \text{②} \text{ となる。}$$

X についての方程式②が異なる 2 つの正の実数解をもつ a の値の範囲は エ である。

このとき、 x についての方程式①も異なる 2 つの実数解 α, β をもち、方程式②の 2 つの解の積の値を考えると、 $\alpha + \beta =$ オ であることがわかる。

〔2〕 ある水槽に水を入れておくと、1日（24時間）経つと水の容積が10%減少する。その水槽が空の時、1回目に10リットルの水を入れ、その後、1日経つ毎に p リットル ($0 < p < 10$) の水をさらに入れるものとする。 a_n は n 回目に水を入れた直後の水槽の水の容積（単位はリットル）とする。

数列 $\{a_n\}$ において、 $n \geq 1$ のとき a_{n+1} と a_n の間には、 p を用いて $a_{n+1} =$ カ となる関係式が成り立つ。したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は n と p を用いて、 $a_n = 10 \left\{ \text{キ} \right\} p + 10$ ク となる。

よって、毎回水を入れた直後の水の容積が常に一定となるのは、 $p =$ ケ のときである。

〔3〕 生徒 10 人に対して、10 点満点の数学の小テストを 2 回行なった。1 回目の小テストの成績は平均点 5（点）、標準偏差 2（点）であった。

2 回目の小テストでは、成績が 1 回目 3 点から 2 点上がって 5 点になった生徒が 3 人、5 点から 3 点上がって 8 点になった生徒が 2 人、逆に 7 点から 1 点下がって 6 点になった生徒が 2 人いた。他の 3 人の成績は、それぞれ 1 回目と変わらなかった。

このとき、1 回目の小テストの成績の分散は であり、2 回目の小テストの成績は平均 （点）、標準偏差 （点）である。

ただし、標準偏差が無理数になるときは無理数のままでよい。

II xy 平面上 ($z = 0$) に描かれた関数 $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ ($0 \leq x \leq 5$) (図1) を z 軸方向に1だけ平行移動させたとき, この関数の曲線の軌跡が描く曲面と, $z = 0$, および $z = 1$ の平面で囲まれた領域を容器とする立体を考える (図2)。また, 図2のように上方に置かれた蛇口から静かに給水する。

単位時間あたりに流れ出る水の体積を q とし, 水面は xz 平面に対して平行に保たれているものとする。

[1] 容器の最も深いところの xy 座標は (,) である。

時間 t の間に蛇口から流れ出る水の体積は である。

容器が空の状態から水面が $y = 0$ に到達するまでの時間は である。

水があふれ出るところの xy 座標は (,) である。

容器が空の状態から水があふれ出るまでの時間は である。

[2] 次に, 水面の y 座標の上昇速度 $\frac{dy}{dt}$ と x に関する3次方程式

$x^3 - 6x^2 + 9x - 2 - y = 0$ の解との関係を求めよう。ただし, 容器は満水でも空でもないとする。

水面の y 座標が y のときの容器内の水の体積を $V(y)$ と表す。短い時間 Δt の間の水面の上昇量を Δy とする。このとき, 水の体積の増分

$\Delta V = V(y + \Delta y) - V(y)$ を考える。 Δy と $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 - s = 0$ の

解の $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$ (ただし, $\alpha(s) \leq \beta(s) \leq \gamma(s)$, $y \leq s \leq y + \Delta y$) の

うち適当なものを用いて奥行き1の直方体を作り, その体積 が ΔV と

等しくなるように s をとることができる。また, 短い時間 Δt の間に蛇口から

流れ出る水の体積は なので, = となる。

ここで, $\Delta t \rightarrow 0$ のとき $\Delta y \rightarrow$, $s \rightarrow$ であるので,

$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} =$ が得られる。

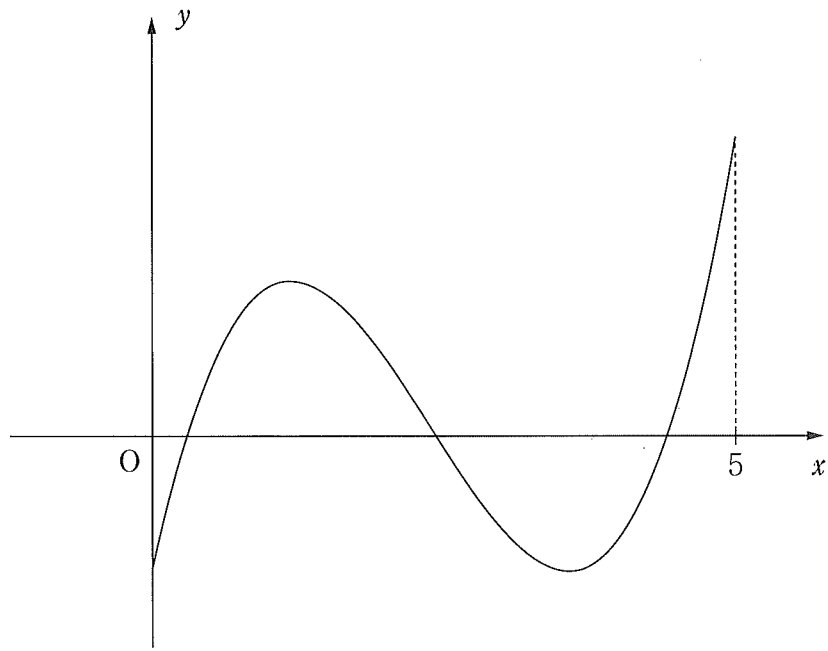


図 1

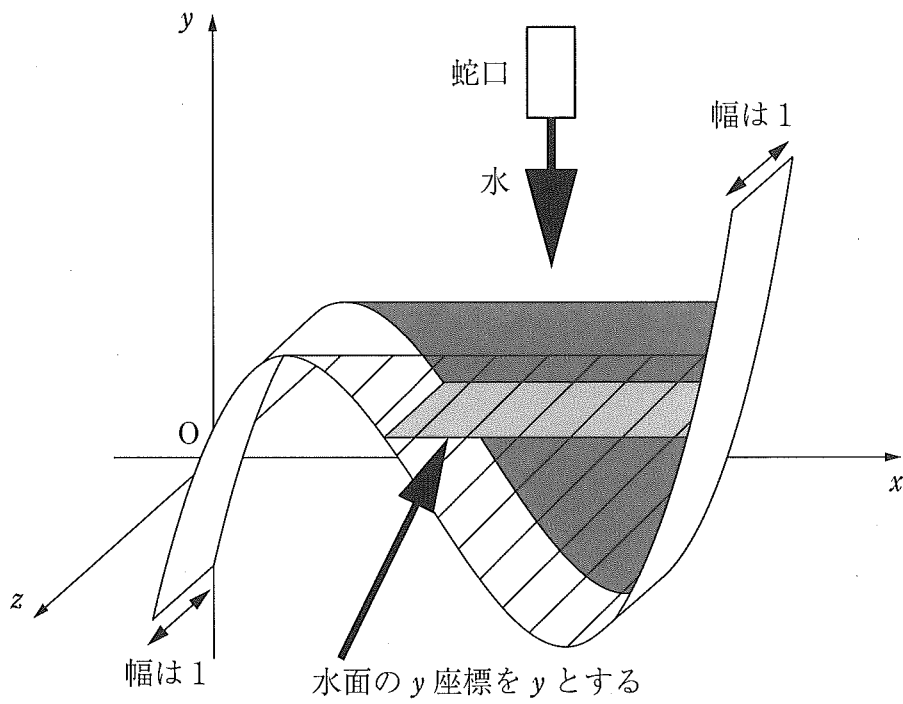


図 2

Ⅲ 空間座標において、4点 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 1, 2)$, $B(2, -1, 3)$, $P(t, u, t)$ があり、 $\angle AOP = 90^\circ$, $OP = 2\sqrt{6}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

$t > 0$ のとき、 $t = \boxed{\text{ア}}$, $u = \boxed{\text{イ}}$ である。これらの4点を通る球面を S とすると、球面 S の中心は $(\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}})$ であり、球面 S の半径は $\boxed{\text{カ}}$ である。

さらに、球面 S と平面 $z = k$ が交わってできる円 C_1 の方程式は k を用いて $(x + \boxed{\text{キ}})^2 + (y + \boxed{\text{ク}})^2 = \boxed{\text{ケ}}$ かつ $z = k$ と表される。この円の半径が $\sqrt{7}$ のとき、 $k = \boxed{\text{コ}}$ または $\boxed{\text{サ}}$ である。

次に、3点 O, A, B を通る平面 α を考えると、平面 α に垂直で、 x 成分が正の単位ベクトル \vec{n} は $(\boxed{\text{シ}}, \boxed{\text{ス}}, \boxed{\text{セ}})$ である。このとき、平面 α と球面 S が交わってできる円 C_2 の中心は $(\boxed{\text{ソ}}, \boxed{\text{タ}}, \boxed{\text{チ}})$ であり、円 C_2 の半径は $\boxed{\text{ツ}}$ である。

IV

[1] 箱の中に白色のカードが4枚、赤色のカードが3枚入っている。白色のカードには1から4までの自然数が、赤色のカードには5から7までの自然数がそれぞれ書かれている。箱からカードを1枚ずつ引き出し、引いたカードは箱に戻さないものとする。赤色のカードを箱から引いた時点で試行が終了するとき、次の問いに答えよ。

(a) 2回目ではじめて赤色のカードを引く確率は、であり、3回目ではじめて赤色のカードを引く確率は、である。

(b) 全ての引いたカードに書かれた数の合計が10である確率は、である。

(c) 引いたカードに書かれた数が全て奇数である確率は、である。このとき、引いたカードの中に1のカードが含まれる確率は、である。

[2] 箱の中に白色のカードが n 枚、赤色のカードが3枚入っている。引いたカードは箱に戻さずに、赤色のカードが出るまでカードを引く。 x 回目ではじめて赤色のカードを引く確率を $P_n(x)$ とすると、 $n \geq 3$ のとき、 $\frac{P_{n+1}(4)}{P_n(4)}$ は n を用いてで表される。 $P_n(4)$ が最大になるのは、 n がまたはのときである。