第 1 問 （50 点）

a, b を実数とする．3 次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx$ に対して，次の問いに答えよ．

問 1　$f(x)$ が極大値と極小値をもつための a, b の条件を求めよ．

問 2　問 1 の条件が成り立つとする．このとき，$f(x)$ の極大値の絶対値と極小値の絶対値が等しくなるための a, b の条件を求めよ．

問 3　問 1 と問 2 の条件を同時に満たす実数の組 (a, b) の集合を座標平面上に図示せよ．

第 2 問　(50 点)

p, q を実数とする．3 次方程式 $x^3 - 3x^2 + px + q = 0$ は 1 個の実数解 b と 2 個の虚数解をもつとする．このとき，次の問いに答えよ．

問 1　虚数解の 1 つを α とするとき，α と共役な複素数 $\overline{\alpha}$ がもう 1 つの虚数解であることを示せ．

問 2　α の実部を r とする．$\alpha = r + \sqrt{3}i$ かつ $(\alpha - b)(\overline{\alpha} - b) = 12$ のとき，$r - b$ がとり得る値をすべて求めよ．

問 3　問 2 の仮定の下で，可能な実数の組 (p, q) をすべて求めよ．

第 3 問 (50 点)

数列 $\{ a_n \}$ を

$$a_0 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

によって定める．次の問いに答えよ．

問 1　m を自然数とするとき，$a_{2m-2} > a_{2m}$，$a_{2m-1} < a_{2m+1}$ を示せ．

問 2　$n \geqq 2$ のとき，$0 < a_n < 1$ を示せ．

第 4 問 (50 点)

O を原点とする座標平面において，C_1 は x 軸に接する半径 2 の円で，その中心 A の x 座標 a は $2 < a \leqq 4$ を満たすとする．また，C_2 は y 軸および C_1 に接する半径 1 の円で，その中心 B の y 座標 b は $b \geqq 2$ を満たすとする．さらに，C_1 と C_2 の接点 P を通る C_1，C_2 の共通接線 ℓ の傾きは 2 であるとする．次の問いに答えよ．

問 1　a と b を求めよ．

問 2　ℓ の方程式を求めよ．

問 3　$\triangle$OAB の面積を求めよ．