第 1 問 （50 点）

α は $0 < \alpha < \pi$ を満たす実数とする．xy 平面において，$y = \sin x$ のグラフと $y = \sin(x-\alpha)$ のグラフの交点のうち，x 座標が正で最小のものを P とおく．次の問いに答えよ．

問 1　P の座標を α を用いて表せ．

問 2　P の x 座標を c とする．曲線 $y = \sin x$ $(\alpha \leqq x \leqq c)$，曲線 $y = \sin(x-\alpha)$ $(\alpha \leqq x \leqq c)$ と直線 $x = \alpha$ とで囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 $V(\alpha)$ を求めよ．

問 3　α が $0 < \alpha < \pi$ の範囲を動くときの $V(\alpha)$ の最大値を求めよ．

第 2 問　(50 点)

$p,\ q$ を実数とする．３次方程式 $x^3-3x^2+px+q=0$ は１個の実数解 b と２個の虚数解をもつとする．このとき，次の問いに答えよ．

問１　虚数解の１つを α とするとき，α と共役な複素数 $\overline{\alpha}$ がもう１つの虚数解であることを示せ．

問２　α の実部を r とする．$\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|=|\alpha-b|=2\sqrt{3}$ のとき，$|r-b|$ を求めよ．

問３　問２の仮定の下で，可能な実数の組 (p,q) をすべて求めよ．

第 3 問 （50 点）

次の問いに答えよ．

問 1　$1 < m \leqq n$ を満たす自然数 m，n に対し，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\int_m^{n+1} \frac{dx}{x} < \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k} < \int_m^{n+1} \frac{dx}{x-1}$$

問 2　$\displaystyle\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k}$ の整数部分を求めよ．ただし，実数 x に対して a が x の整数部分であるとは，a が整数であって $a \leqq x < a+1$ が成り立つことをいう．また，正の実数 x の自然対数を $\log x$ とし，$\log 2 = 0.69$，$\log 3 = 1.10$，$\log 2020 = 7.61$ とする．

第 4 問 （50 点）

座標空間内に 3 点 A$(\sqrt{3}, 0, 0)$, B$(0, 3, 0)$, C$(-\sqrt{3}, 0, 0)$ をとる．$\triangle$ABC の重心を通り xy 平面に垂直な直線を ℓ とする．また，点 P(p, q, r) は

$$r > 0, \qquad \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0, \qquad \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}} = 4$$

を満たしているものとする．次の問いに答えよ．

問 1　p および r を q を用いて表せ．また，q がとり得る値の範囲を求めよ．

問 2　線分 BP の中点を M とする．また，ℓ 上に点 N を $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ が垂直になるようにとる．N の座標を q を用いて表せ．

問 3　N の z 座標が最小になるときの q の値を求めよ．