1. a, b, c, p は実数とし，$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は $(x-p)^2$ で割り切れるとする．以下の問に答えよ．(配点25点)

(1) b, c を a, p を用いて表せ.

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，$f'\left(p + \dfrac{4}{3}\right) = 0$ をみたすとする．a を p を用いて表せ.

(3) (2) の条件のもとで $p = 0$ とする．曲線 $y = f(x)$ と $y = f'(x)$ の交点を x 座標が小さい方から順に A, B, C とし，線分 AB と曲線 $y = f'(x)$ で囲まれた部分の面積を S_1，線分 BC と曲線 $y = f'(x)$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする．このとき，$S_1 + S_2$ の値を求めよ.

2. n を自然数とし, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次の (i), (ii) で定める.

(i) $a_1 = b_1 = 1$ とする.

(ii) $f_n(x) = a_n(x+1)^2 + 2b_n$ とし, $-2 \leqq x \leqq 1$ における $f_n(x)$ の最大値を a_{n+1}, 最小値を b_{n+1} とする.

以下の問に答えよ. (配点 25 点)

(1) すべての自然数 n について $a_n > 0$ かつ $b_n > 0$ であることを示せ.

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) $c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおく. 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.

3. 以下の問に答えよ. (配点25点)

(1) 和が30になる2つの自然数からなる順列の総数を求めよ.

(2) 和が30になる3つの自然数からなる順列の総数を求めよ.

(3) 和が30になる3つの自然数からなる組合せの総数を求めよ.