

1. α は実数とし, $f(x)$ は係数が実数である3次式で, 次の条件 (i), (ii) をみたすとする.

(i) $f(x)$ の x^3 の係数は1である.

(ii) $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について,

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$$

が成り立つ.

以下の問に答えよ. (配点30点)

(1) $f(x)$ は $(x - \alpha)^2$ で割り切れることを示せ.

(2) $f(\alpha + 2) = 0$ とする. $f'(x) = 0$ かつ $x \neq \alpha$ をみたす x を α を用いて表せ.

(3) (2)の条件のもとで $\alpha = 0$ とする. xy 平面において不等式

$$y \geq f(x) \text{ かつ } y \geq f'(x) \text{ かつ } y \leq 0$$

の表す部分の面積を求めよ.

2. θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ をみたす実数とし, 原点 O , $A(1, 0)$, $B(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ を頂点とする $\triangle OAB$ の内接円の中心を P とする. また, θ がこの範囲を動くときに点 P が描く曲線と線分 OA によって囲まれた部分を D とする. 以下の問に答えよ. (配点30点)

(1) 点 P の座標は $\left(1 - \sin \theta, \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta}\right)$ で表されることを示せ.

(2) D を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ.

3. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 和が 30 になる 2 つの自然数からなる順列の総数を求めよ.
- (2) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる順列の総数を求めよ.
- (3) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる組合せの総数を求めよ.

4. n を自然数とし, $2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$ に対して $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ とする. 以下の間に答えよ. (配点 30 点)

(1) $f(x)$ が最大となる x の値がただ 1 つ存在することを示せ.

(2) (1) の x の値を x_n とする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\tan x_n}$ を求めよ.

5. p を 2 以上の自然数とし, 数列 $\{x_n\}$ は

$$x_1 = \frac{1}{2^p + 1}, \quad x_{n+1} = |2x_n - 1| \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたすとする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $p = 3$ のとき, x_n を求めよ.
- (2) $x_{p+1} = x_1$ であることを示せ.