数学 I

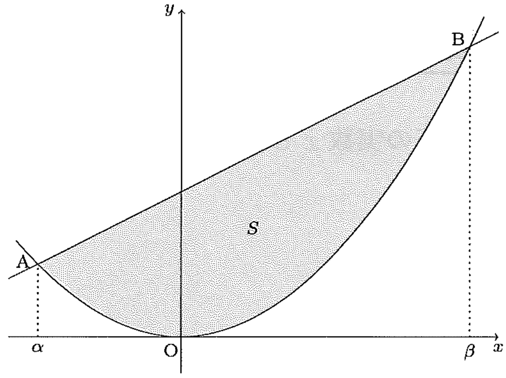
(1) 正の実数 x と y が $9x^2 + 16y^2 = 144$ を満たしているとき，xy の最大値は $\boxed{(1)}\boxed{(2)}$ である.

(2) 集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ の部分集合は $\boxed{(3)}\boxed{(4)}$ 個ある．ただし，全体集合および空集合も部分集合と数えるものとする.

(3) 集合 S の要素が 33 個のとき，S の部分集合の個数を 10 進数であらわすと $\boxed{(5)}\boxed{(6)}$ 桁の数であり，その最上位桁にあらわれる数は $\boxed{(7)}$，最下位桁にあらわれる数は $\boxed{(8)}$ である．ただし，全体集合および空集合も部分集合と数えるものとする.

数学II

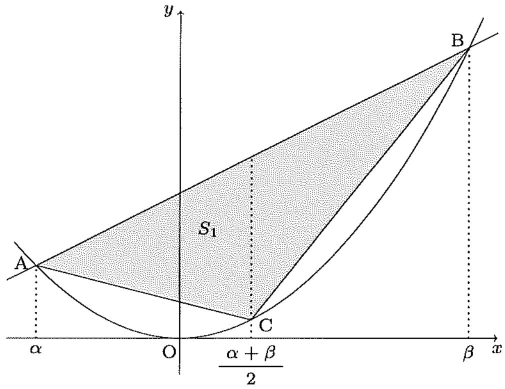
放物線 $y = x^2$ とそれに 2 点で交わる直線で囲まれた右図の濃い色の部分の面積 S は，放物線と直線の交点を $\mathrm{A}(\alpha, \alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta, \beta^2)$ $(\alpha < \beta)$ としたとき



$$S = \frac{\boxed{(9)}\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}\boxed{(12)}}(\beta - \alpha)^{\boxed{(13)}}$$

である．以下では，同じ面積を，アルキメデスが使った取り尽くし法で求める．

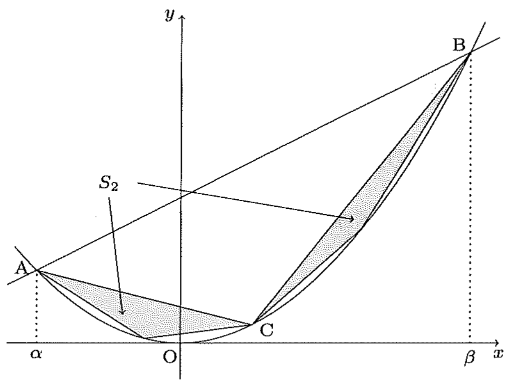
点 A と点 B の間の放物線上に点 C をとり，三角形 ABC を考えたとき，AB を底辺とし高さが最大となるのは，点 C の x 座標が $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ のときであり，そのとき，三角形 ABC の面積 S_1 は



$$S_1 = \frac{\boxed{(14)}\boxed{(15)}}{\boxed{(16)}\boxed{(17)}}(\beta - \alpha)^{\boxed{(18)}}$$

である．

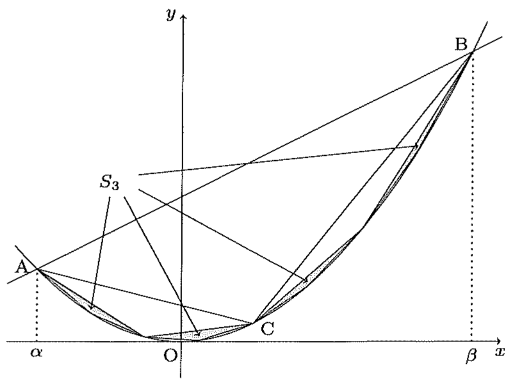
S から S_1 を取り除くと，線分 AC と放物線で囲まれた領域と線分 CB と放物線で囲まれた領域の 2 つができるが，同じように，それぞれに含まれる高さが最大の三角形を考えたとき，その 2 つの三角形を合わせた面積 S_2 は



$$S_2 = \frac{\boxed{(19)}\boxed{(20)}}{\boxed{(21)}\boxed{(22)}}\,S_1$$

である．

さらに，S から S_1，S_2 を取り除いた部分に，同じように，それぞれに含まれる高さが最大の三角形を考えたとき，その 4 つの三角形を合わせた面積 S_3 は



$$S_3 = \frac{\boxed{(23)}\boxed{(24)}}{\boxed{(25)}\boxed{(26)}}\,S_2$$

である．

このように，順次，高さが最大の三角形を考え，その三角形を合わせた面積を計算していくことで

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots = S_1 \times \left\{ 1 + \frac{\boxed{(27)}\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}\boxed{(30)}} + \left(\frac{\boxed{(27)}\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}\boxed{(30)}} \right)^2 + \left(\frac{\boxed{(27)}\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}\boxed{(30)}} \right)^3 + \cdots \right\}$$

となることがわかる．

このように，図形に内接する一連の多角形を描き，それらの面積を合計することで元の図形の面積を求める方法を取り尽くし法という．アルキメデスは取り尽くし法を使い，直線と放物線に囲まれた部分の面積は，その直線の線分を底辺とし放物線に内接する高さが最大の三角形の面積の $\dfrac{\boxed{(31)}\boxed{(32)}}{\boxed{(33)}\boxed{(34)}}$ 倍であることを発見した．

環

数学III

数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ は，$a_1=1, a_2=2$ であり，n が 3 以上の奇数のとき a_{n-2}, a_{n-1}, a_n が等差数列となり，n が 4 以上の偶数のとき a_{n-2}, a_{n-1}, a_n が等比数列となっている．

(1) このとき，$a_3, a_4, \ldots, a_8$ は

$$a_3 = \boxed{(35)}\boxed{(36)},\ a_4 = \frac{\boxed{(37)}\boxed{(38)}}{\boxed{(39)}\boxed{(40)}},\ a_5 = \boxed{(41)}\boxed{(42)},\ a_6 = \boxed{(43)}\boxed{(44)},\ a_7 = \boxed{(45)}\boxed{(46)},\ a_8 = \frac{\boxed{(47)}\boxed{(48)}}{\boxed{(49)}\boxed{(50)}}$$

である．

(2) $a_n \geqq 100$ となるのは，$n \geqq \boxed{(51)}\boxed{(52)}$ のときである．

(3) 一般に

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\boxed{(53)}\boxed{(54)}}\left(n+\boxed{(55)}\boxed{(56)}\right)\left(n+\boxed{(57)}\boxed{(58)}\right) & (n \text{ は奇数, ただし } \boxed{(55)}\boxed{(56)} \leqq \boxed{(57)}\boxed{(58)}) \\ \dfrac{1}{\boxed{(59)}\boxed{(60)}}\left(n+\boxed{(61)}\boxed{(62)}\right)^2 & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$$

であり，奇数と偶数の場合を合わせると

$$a_n = \frac{1}{\boxed{(63)}\boxed{(64)}}\left\{\boxed{(65)}\boxed{(66)}\,n^2 + \boxed{(67)}\boxed{(68)}\,n + \boxed{(69)}\boxed{(70)} + \left(\boxed{(71)}\boxed{(72)}\right)^n\right\}$$

となる．

数学IV

(1) ある正の整数 m に対して，x に関する方程式

$$x^3 - mx^2 + 2(2m-3)x - (m+9)(m-9) = 0$$

の 1 つの解が 2 であった．このとき，$m = \boxed{(73)}\boxed{(74)}\boxed{(75)}$ であり，他の 2 つの解は小さい順に

$$\boxed{(76)}\boxed{(77)}, \quad \boxed{(78)}\boxed{(79)}$$

である．

(2) ある正の整数 m に対して，x に関する方程式

$$x^3 - 20x^2 + mx - 2(m-1) = 0$$

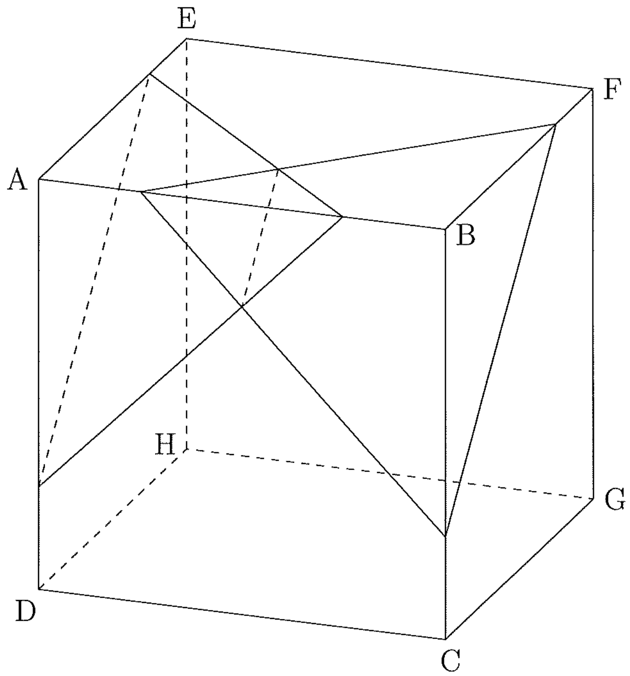
の解が 3 つの異なる正の整数となった．このとき，$m = \boxed{(80)}\boxed{(81)}\boxed{(82)}$ であり，3 つの解は小さい順に

$$\boxed{(83)}\boxed{(84)}, \quad \boxed{(85)}\boxed{(86)}, \quad \boxed{(87)}\boxed{(88)}$$

である．

環

数学V



1 辺の長さが 4 である立方体 ABCD–EFGH について，頂点 A を含む辺 AB, AD, AE を 3 : 1 に内分する 3 点を考え，これらの内分点を通る平面を S_{A} とする．また，頂点 B を含む辺 BA, BC, BF を 3 : 1 に内分する 3 点を考え，これらの内分点を通る平面を S_{B} とする．同様に，頂点 C を含む辺 CB, CD, CG, 頂点 D を含む辺 DA, DC, DH，頂点 E を含む辺 EA, EF, EH，頂点 F を含む辺 FB, FE, FG，頂点 G を含む辺 GC, GF, GH，頂点 H を含む辺 HD, HE, HG を 3 : 1 に内分する 3 点をそれぞれ考え，これらの内分点を通る平面をそれぞれ S_{C}, S_{D}, S_{E}, S_{F}, S_{G}, S_{H} とする．

(1) 2 つの平面 S_{A} と S_{B} によって，立方体 ABCD–EFGH は $\boxed{(89)}\boxed{(90)}$ 個の立体に分けられる．そのうち最大となる立体の体積は $\dfrac{\boxed{(91)}\boxed{(92)}\boxed{(93)}}{\boxed{(94)}\boxed{(95)}\boxed{(96)}}$ であり，その表面積は $\boxed{(97)}\boxed{(98)} + \boxed{(99)}\boxed{(100)}\sqrt{\boxed{(101)}\boxed{(102)}}$ である．

(2) 8 つの平面 S_{A}, S_{B}, S_{C}, S_{D}, S_{E}, S_{F}, S_{G}, S_{H} によって，立方体 ABCD–EFGH は $\boxed{(103)}\boxed{(104)}$ 個の立体に分けられる．そのうち最大となる立体の体積は $\boxed{(105)}\boxed{(106)}$ であり，その表面積は $\boxed{(107)}\boxed{(108)} + \boxed{(109)}\boxed{(110)}\sqrt{\boxed{(111)}\boxed{(112)}}$ である．

数学VI

ABO 式血液型には，A 型，B 型，AB 型，O 型の 4 種類が存在し，血液型に関わる遺伝子には，A 遺伝子，B 遺伝子，O 遺伝子の 3 種類が存在する．すべての人は，これらの遺伝子を 1 対もっており，A 遺伝子と A 遺伝子の対 (AA) あるいは A 遺伝子と O 遺伝子の対 (AO) をもつ人は A 型，B 遺伝子と B 遺伝子の対 (BB) あるいは B 遺伝子と O 遺伝子の対 (BO) をもつ人は B 型，A 遺伝子と B 遺伝子の対 (AB) をもつ人は AB 型，O 遺伝子と O 遺伝子の対 (OO) をもつ人は O 型になる．ここで，対をなす 2 つの遺伝子に順序はなく，すべての遺伝子対は AA, AO, BB, BO, AB, OO のいずれかであらわされる．子は，母親の遺伝子対の一方と父親の遺伝子対の一方を引き継ぎ，新たに遺伝子対を形成することで血液型が決まる．このとき，母親においても父親においても，遺伝子対のうちいずれの遺伝子を子に引き継ぐかは等確率である．

以下に登場する人物の住む国の血液型の遺伝子対の割合は，AA が 10%，AO が 30%，BB が 10%，BO が 20%，AB が 10%，OO が 20% であり，これは時と共に変化せず常に一定であるとする．

血液型	A 型		B 型		AB 型	O 型
遺伝子対	AA	AO	BB	BO	AB	OO
割合	10%	30%	10%	20%	10%	20%

いま，X さんの血液型が O 型であることだけがわかっているとき，X さんと血縁関係にある人の血液型について考えてみよう．

(1) X さんとこの国の人との間に生まれてくる子の血液型が，O 型である確率は $\dfrac{\boxed{(113)}\boxed{(114)}}{\boxed{(115)}\boxed{(116)}}$，A 型である確率は $\dfrac{\boxed{(117)}\boxed{(118)}}{\boxed{(119)}\boxed{(120)}}$，B 型である確率は $\dfrac{\boxed{(121)}\boxed{(122)}}{\boxed{(123)}\boxed{(124)}}$ と推定することができる．

(2) X さんの血液型がわからないときには，X さんの両親がともに O 型である確率は，この国の血液型の割合から $\dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{25}$ と推定される．しかし，X さんが O 型であることがわかっているため，両親がともに O 型である確率は $\dfrac{\boxed{(125)}\boxed{(126)}}{\boxed{(127)}\boxed{(128)}}$ と推定することができる．また，X さんの母親のみの血液型を考える場合，X さんが O 型であることから，母親の血液型が AB 型であることはなく，母親の血液型が O 型である確率は $\dfrac{\boxed{(129)}\boxed{(130)}}{\boxed{(131)}\boxed{(132)}}$，A 型である確率は $\dfrac{\boxed{(133)}\boxed{(134)}}{\boxed{(135)}\boxed{(136)}}$，B 型である

確率は $\dfrac{\boxed{(137)}\boxed{(138)}}{\boxed{(139)}\boxed{(140)}}$ と推定することができる.