I. 以下の問いに答えよ。

(i) zを複素数とし，数列$\{a_n\}$が漸化式$a_{n+1} = za_n - z^2$を満たすとする。$z = \dfrac{\boxed{(1)}}{\boxed{(2)}} \pm \dfrac{\sqrt{\boxed{(3)}}}{\boxed{(4)}}\, i$のとき，一般項が$a_n = 1\ (n = 1, 2, \cdots)$となる。

(ii) 実数aに対し，$f(x) = |x| + a$とおく。$\displaystyle\int_{-5}^{5} \big|f(x)\big|\, dx$が最小となるのは$a = \dfrac{\boxed{(5)\ (6)}}{\boxed{(7)}}$のときである。

(iii) $f(x) = 4x^3 - 3x$とし，その導関数を$f'(x)$とする。$f'(\sin\theta) = 3 - 3\sqrt{2}$を満たす$\theta\ (0 < \theta < \pi)$は

$$\frac{\boxed{(8)}}{\boxed{(9)}}\pi,\quad \frac{\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}}\pi$$

である。また，$f(\cos\theta) = \dfrac{1}{2}$を満たす$\theta\ (0 < \theta < \pi)$は

$$\frac{\boxed{(12)}}{\boxed{(13)}}\pi,\quad \frac{\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}}\pi,\quad \frac{\boxed{(16)}}{\boxed{(17)}}\pi$$

である。

(iv) $\displaystyle\sum_{r=0}^{5} {}_5\mathrm{C}_r \tan^{2r}\frac{\pi}{3} = \boxed{(18)\ (19)\ (20)\ (21)}$である。

(v) 数列$\{a_n\}$が漸化式$a_{n+1} = \dfrac{1}{4}{a_n}^3$を満たし，$a_1 = 4$とする。このとき，

$$\log_2 a_{n+1} = \boxed{(22)}\log_2 a_n - \boxed{(23)}$$

であり，$a_n > 2 \cdot 10^{30100}$を満たす最小の自然数nは$\boxed{(24)\ (25)}$である。ただし，必要であれば$\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$を近似として用いてもよい。

II. 座標平面上の原点を中心とする半径1の円上の動点A, B, Cを考える。以下，Aが$(1,0)$, Bが$(0,1)$, Cが$(-1,0)$にいる状態を初期状態と呼ぶ。

8枚の硬貨$Q_1, Q_2, Q_3, \cdots, Q_8$を同時に投げる試行をTとする。A, B, Cはいずれも，試行Tを行うたびに次の規則に従って動く。

$n = 1, 2, 3, \cdots, 8$ に対して，$\left(\cos\dfrac{n}{4}\pi,\ \sin\dfrac{n}{4}\pi\right)$ にいる動点は，
硬貨Q_nが表となったとき $\left(\cos\dfrac{n+1}{4}\pi,\ \sin\dfrac{n+1}{4}\pi\right)$ に動き，
硬貨Q_nが裏となったとき $\left(\cos\dfrac{n-1}{4}\pi,\ \sin\dfrac{n-1}{4}\pi\right)$ に動く。

この規則により，ある時点で座標が一致している複数の動点は，試行Tの後も座標が一致する。

(i) 初期状態から試行Tを2回行ったとき，AとBの座標が一致している確率は $\dfrac{\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}}$ であり，AとCの座標が一致している確率は $\dfrac{\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}}$ である。また，A, B, Cの座標が全て一致している確率は $\dfrac{\boxed{(30)}}{\boxed{(31)\ (32)}}$ である。

(ii) 初期状態から試行Tを2回行ったとき，AとBの座標が一致しているとする。このとき，Cの座標がA, Bの座標と一致している確率は $\dfrac{\boxed{(33)}}{\boxed{(34)}}$ である。

(iii) 初期状態から試行Tを4回行ったとき，AとCの座標が一致している確率は $\dfrac{\boxed{(35)\ (36)}}{\boxed{(37)\ (38)}}$ である。

(iv) 初期状態から試行Tを5回行ったとき，AとCの座標が一致している確率は $\dfrac{\boxed{(39)\ (40)}}{\boxed{(41)\ (42)}}$ である。

III. 座標平面の原点をOとする。関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ に対して2点 $\mathrm{A}(x, f(x))$，$\mathrm{B}(2x, f(x)+xf'(x))$ を考える。ただし，$x \neq 0$ とする。

(i) 2点A, Bを通る直線上の点をPとすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(x\left(t + \boxed{(43)}\right),\ f(x) + txf'(x)\right)$$

と表せる。

以下，$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2$ とする。

(ii) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の大きさ $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が最小となるのは

$$t = -\frac{x^2 + \boxed{(44)}}{\boxed{(45)}\left(x^2 + \boxed{(46)}\right)}$$

のときで，そのとき

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \frac{\left|x^2 - \boxed{(47)}\right|}{\boxed{(48)}\sqrt{x^2 + \boxed{(49)}}}$$

である。

(iii) $0 < x < 2$ の範囲で $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 S が最大となるのは

$$x = \frac{\boxed{(50)}\sqrt{\boxed{(51)}}}{\boxed{(52)}}$$

のときで，そのとき

$$S = \frac{\boxed{(53)}\sqrt{\boxed{(54)}}}{\boxed{(55)}}$$

である。

IV. 座標空間内で，原点Oを中心とする半径rの球面Sを考える。hを正の実数として，z軸上の点H$(0,0,r+h)$を通る平面のうち，zx平面上の点Aで球面Sと接するものをα，yz平面上の点Bで球面Sと接するものをβとする(ただし，点Aのx座標と点Bのy座標は正とする)。

$t=\dfrac{h}{r}$として，空欄 (ア) ～ (オ) に入るtを用いた適切な式を，また，空欄 (カ) に入る適切な整数を，それぞれ解答用紙Bの所定の欄に記述しなさい。**ただし，解答にはrとhを用いてはならない。**

(i) 点Aの座標は

$$\left(\boxed{\quad（ア）\quad}\,r,\ 0,\ \boxed{\quad（イ）\quad}\,r\right)$$

である。

(ii) 平面αの方程式は

$$\boxed{\quad（ウ）\quad}\,x+z=\boxed{\quad（エ）\quad}\,r$$

である。

(iii) 平面αの法線ベクトルと平面βの法線ベクトルのなす角がθ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$であったとする。このとき，

$$\cos\theta=\boxed{\quad（オ）\quad}$$

である。

(iv) $r=6400$, $h=400$のとき，鋭角θの大きさを度数法を用いて最も近い整数で表すと

$$\theta\fallingdotseq\boxed{\quad（カ）\quad}^\circ$$

となる。ただし，必要であれば三角比の表を用いてよい。

三角比の表

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	なし