[1] a, b, c は条件 $a^2 + b^2 + ab = c^2$, $a < b$ を満たす自然数とする.

(1) $a = 3$ であるとき, $c = \boxed{(1)}$ である.

(2) 和が 21 になる 2 つの自然数の積の最大値は $\boxed{(2)}\boxed{(3)}\boxed{(4)}$ であることから, $a + b = 21$ であるとき, $c = \boxed{(5)}\boxed{(6)}$ である.

(3) $a + b - c = p$ とおくと, a, b, p は

$$\left(a - \boxed{(7)}p\right)\left(b - \boxed{(8)}p\right) = \boxed{(9)}p^2$$

を満たす. よって, p が 5 以上の素数であるとき, 条件を満たす a, b, c の組は全部で $\boxed{(10)}$ 個ある. また, $p = 7$ であるとき, c の値が最小となるのは, $a = \boxed{(11)}\boxed{(12)}$, $b = \boxed{(13)}\boxed{(14)}$ のときである.

[2] 1個のさいころを8回続けて投げる．ただし，さいころを1回投げ終えるごとに，それまでに出た目の合計を記録しておく．

(1) さいころを3回投げ終えた時点で，それまでに出た目の合計がちょうど9である確率は $\dfrac{\boxed{(15)}\boxed{(16)}}{\boxed{(17)}\boxed{(18)}\boxed{(19)}}$ であり，合計が12以上である確率は $\dfrac{\boxed{(20)}}{\boxed{(21)}}$ である．

(2) さいころを8回投げ終えるまでの間に，出た目の合計がちょうど6になることが起きる確率は，$a = \boxed{(22)}, b = \boxed{(23)}, c = \boxed{(24)}, d = \boxed{(25)}$ とおくと $\dfrac{a^b}{c^d}$ と書ける．

(3) 出た目の合計が初めて7以上になった時点で，その値が12以上である確率は，$e = \boxed{(26)}, f = \boxed{(27)}$ とおくと $\dfrac{a^e}{c^f}$ と書け，その値がちょうど9である確率は，$g = \boxed{(28)}, h = \boxed{(29)}, i = \boxed{(30)}, j = \boxed{(31)}$ とおくと $\dfrac{a^g}{c^h} - \dfrac{a^i}{c^j}$ と書ける．ただし，a, c は **(2)** で求めた値とする．

[3] 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を，$a_1 = 1$, $b_1 = 1$ かつ $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$$\frac{a_n}{b_n} < 2 \text{ ならば } \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 1 \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}, \quad \frac{a_n}{b_n} \geqq 2 \text{ ならば } \begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = b_n + 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

で定める．

(1) $a_3 = \boxed{(32)}$, $b_3 = \boxed{(33)}$, $a_6 = \boxed{(34)}$, $b_6 = \boxed{(35)}$ である．

(2) 一般に，自然数 m に対して

$$a_{3m} = \boxed{(36)}\,m + \boxed{(37)}, \quad b_{3m} = \boxed{(38)}\,m + \boxed{(39)} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

が成り立つと推測される．この推測が正しいことを次のように確かめる．

$m = 1$ のとき②は成り立つ．$m = k$ のとき②を仮定すると，①から

$$a_{3k+1} = \boxed{(40)}\,k + \boxed{(41)}, \quad b_{3k+1} = \boxed{(42)}\,k + \boxed{(43)}$$

となる．再び①から

$$a_{3k+2} = \boxed{(44)}\,k + \boxed{(45)}, \quad b_{3k+2} = \boxed{(46)}\,k + \boxed{(47)}$$

が成り立つ．さらに①から

$$a_{3k+3} = \boxed{(48)}\,k + \boxed{(49)}, \quad b_{3k+3} = \boxed{(50)}\,k + \boxed{(51)}$$

となるので，$m = k + 1$ のときにも②は成り立つ．

(3) $n \geqq 1$ に対して $S_n = \sum_{k=1}^{n} 10^{a_k}$ とする．自然数 m に対して，$s = \boxed{(52)}$ とおくと

$$S_{3m} = \frac{\boxed{(53)}\boxed{(54)}}{\boxed{(55)}\boxed{(56)}}\left(10^{sm} - 1\right)$$

となる．よって，S_{3m} は $\boxed{(57)}\,m + \boxed{(58)}$ 桁の整数になる．

[4] 座標空間の原点Oを中心とする半径1の球面上に$\mathrm{A}\,(0,0,1)$, $\mathrm{B}\,(0,0,-1)$と異なる点$\mathrm{C}\,(p,q,r)$をとり，AとC，BとCを通る直線とxy平面の交点を，それぞれP, Qとする．また，座標軸上に2点$\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$, $\mathrm{S}\left(0,\dfrac{1}{4},0\right)$をとる．

(1) P, Qの座標をそれぞれp,q,rを用いて表せ．

(2) Pが線分RS上を動くとき，Qの軌跡をxy平面上に図示せよ．

(3) Pが線分RS上を動くとき，$\triangle$ABCの面積の最小値を求めよ．

[5] 実数 α は $\log_8(2-\alpha)+\log_{64}(\alpha+1)=\log_4\alpha$ を満たすとする．また，点 $\left(\sqrt{3}\alpha, \alpha^2\right)$ に関して，曲線 $y=\log_2 x$ 上の点 (x, y) と対称な点を (s, t) とする．

(1) α の値を求めよ．

(2) t を s を用いて表せ．

(3) 実数 s, t が $s \leqq 0$, $t \geqq 0$ および **(2)** の関係式を満たすとき，

$$3\sin\left(\frac{s+t}{2}\pi\right)+\cos\left(\frac{s+t}{2}\pi\right)$$

の最大値と最小値を求めよ．必要ならば $1.5<\sqrt[3]{4}<1.6$ を用いてもよい．

[6] a を正の定数とする．また，x の 3 次式 $f(x)$ は次の条件を満たすとする．

$$f(0) = -a^2, \quad f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad \int_0^a f(x)dx = 0$$

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を求めよ．

(3) $a = 4$ のとき，x 軸，y 軸および曲線 $y = f(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ．