1. 次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

袋Aには赤玉3個，白玉1個，袋Bには赤玉1個，白玉3個が入っている。「袋Aから2個の玉を取り出して袋Bに入れ，次に，袋Bから2個の玉を取り出して袋Aに入れる」という操作を繰り返す。1回の操作の後，袋Aに白玉が2個以上ある確率は $\boxed{(ア)}$，2回の操作の後，袋Aの中が白玉だけになる確率は $\boxed{(イ)}$ である。

2. p を 2 以上の自然数の定数とする。$n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$ に対して，関数 $f_n(x)\ (x > 0)$ を

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\cdots\left(1 + \frac{x}{pn}\right)$$

で定める。例えば，$p = 2$ のとき

$$f_2(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{3}\right)\left(1 + \frac{x}{4}\right)$$
$$f_3(x) = \left(1 + \frac{x}{3}\right)\left(1 + \frac{x}{4}\right)\left(1 + \frac{x}{5}\right)\left(1 + \frac{x}{6}\right)$$

である。$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ (x > 0)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{t}{1+t} \leqq \log(1+t) \leqq t$ が成り立つことを示せ。ただし，対数は自然対数とする。

(2) $f(x)$ を求めよ。

3. 次の問いに答えよ。

(1) a，b，n は自然数の定数で，b は 4 の倍数ではなく，$n \geqq 2$ とする。
a が 2^n の倍数であるが，2^{n+1} の倍数ではないとき，$a(a+b)$，$2a(2a+b)$ のいずれかは，2^{n+1} の倍数であるが，2^{n+2} の倍数ではないことを示せ。

(2) b は自然数の定数で，4 の倍数ではないとする。
3 以上の任意の自然数 n に対して，次をみたす自然数 a_n が存在することを示せ。

$\dfrac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}}$ は，小数第 n 位の数字が 5 である小数第 n 位までの有限小数で表される。

4. O を原点とする xyz 空間内に，xy 平面上の放物線 $y = x^2$ を y 軸のまわりに回転してできる曲面 S と，正四面体 OABC があり，条件「3 頂点 A，B，C は S 上にある」をみたしている。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 正四面体 OABC の 1 辺の長さを求めよ。

(2) 正四面体 OABC が条件をみたしながら動くとき，xy 平面による正四面体 OABC の切り口の面積の最小値を求めよ。