〔 1 〕　m，p，q を実数とする。二つの関数

$$f(x)=\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x,\quad g(x)=\frac{1}{6}(x-p)^2+q$$

を考える。座標平面上の放物線

$$C_1\colon y=f(x),\quad C_2\colon y=g(x)$$

および直線 $\ell\colon y=mx$ について，次の二つの条件 (i)，(ii) が成り立つとする。

(i) 直線 ℓ は原点 O において放物線 C_1 に接している。

(ii) 直線 ℓ は放物線 C_2 に接している。

直線 ℓ と放物線 C_2 の接点を A とする。次の問いに答えよ。

(1) m の値を求めよ。

(2) q を p を用いて表せ。また，点 A の座標を p を用いて表せ。

(3) $p\neq -1$ とする。放物線 C_1 と放物線 C_2 の二つの共有点の x 座標を p を用いて表せ。

(4) $p=2$ とする。放物線 C_1 と放物線 C_2 で囲まれた図形のうち，$x\geqq 0$ の範囲にある部分の面積 S と，$x\leqq 0$ の範囲にある部分の面積 T をそれぞれ求めよ。

〔２〕 a，b を正の定数とする。$0<\theta<\pi$ を満たす実数 θ に対し，平面上で，次の三つの条件 (i)，(ii)，(iii) を満たす三角形 PAB，およびこの三角形と辺 AB を共有する長方形 ABCD を考える。

(i) $\mathrm{PA}=a$，$\mathrm{PB}=b$，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ である。

(ii) 2 点 C，D はともに直線 AB に関して点 P と反対側にある。

(iii) $\mathrm{AB}=3\,\mathrm{AD}$ である。

三角形 PAB の面積と長方形 ABCD の面積の和を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 辺 AB の長さを a，b，θ を用いて表せ。

(2) S を a，b，θ を用いて表せ。

(3) θ が $0<\theta<\pi$ の範囲を動くときの S の最大値を M とし，S が最大値 M をとるときの θ の値を β とする。M を a，b を用いて表せ。また，$\sin\beta$ および $\cos\beta$ の値をそれぞれ求めよ。

(4) $a=16$，$b=25$ とする。また，β を (3) で定めた値とする。$\theta=\beta$ のときの，点 P と直線 AB の距離を求めよ。

〔３〕　1個のさいころを2回投げる。1回目に出た目を a_1，2回目に出た目を a_2 とする。次に，1枚の硬貨を2回投げる。1回目に表が出た場合は $b_1 = 1$，裏が出た場合は $b_1 = a_1$ とおく。また，2回目に表が出た場合は $b_2 = 1$，裏が出た場合は $b_2 = a_2$ とおく。ベクトル

$$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2), \quad \overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) $a_1 + a_2 = 7$ である確率を求めよ。

(2) $b_1 = 1$ である確率を求めよ。

(3) $\overrightarrow{b} = (1, 1)$ であったとき，$\overrightarrow{a} = (1, 6)$ である条件付き確率を求めよ。

(4) $\overrightarrow{b} = (1, 1)$ であったとき，$a_1 + a_2 = 7$ である条件付き確率を求めよ。

〔 4 〕 数列 $\{a_n\}$ を次の条件 (i)，(ii) により定める。

(i) $a_1 = 1$ である。

(ii) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，n が奇数ならば $a_{n+1} = -a_n + 1$，また n が偶数ならば $a_{n+1} = -2a_n + 3$ である。

さらに，数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{2n-1}$ により定め，数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{2n}$ により定める。次の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

(3) 自然数 m に対して，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $(2m-1)$ 項までの和を T_m とする。T_m を m を用いて表せ。