

1 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 の 9 個の数字から異なる 3 個を選んで並べ、3 桁の整数を 1 つ作る。以下の問に答えよ。

- (1) 整数は何通りできるか。
- (2) 偶数は何通りできるか。
- (3) 400 より大きい整数は何通りできるか。
- (4) 400 より大きい奇数は何通りできるか。
- (5) 350 より小さい偶数は何通りできるか。

2 $0 < s < 1, 0 < t < 1$ とする。平行四辺形 OABC において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし、OC を $s : (1 - s)$ に内分する点を E, CB を $t : (1 - t)$ に内分する点を F, OF と AE との交点を G とする。以下の問に答えよ。

(1) \overrightarrow{AF} を \vec{a}, \vec{c}, s, t を用いて表せ。

(2) \overrightarrow{OG} を \vec{a}, \vec{c}, s, t を用いて表せ。

(3) $\triangle OGE$ と $\triangle ABF$ の面積をそれぞれ Q, Q' とするとき、 $\frac{Q'}{Q}$ を s, t を用いて表せ。

(4) s, t が $0 < s < 1, 0 < t < 1, st = \frac{1}{3}$ をみたしながら動くとき、(3) で求めた $\frac{Q'}{Q}$ の値の範囲を求めよ。

3

以下の間に答えよ。ただし、必要ならば次の2つの公式を用いてもよい。

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

- (1) 実数 x, y に対して, $\sin x = \sin y$ が成り立つとき, y を x を用いて表せ。
- (2) $0 \leq s < 2\pi$ のとき, 次の式をみたす実数 s をすべて求めよ。

$$\sin 2s = \sin(3s + 1)$$

- (3) $0 \leq s < t < 2\pi$ のとき, 次の2つの式を同時にみたす実数 s, t の組をすべて求めよ。

$$\begin{cases} \cos s = \cos t \\ \sin 5s = \sin 5t \end{cases}$$

4 $\triangle ABC$ において、 $AB = 3$ 、 $BC = 5$ 、 $CA = 4$ とする。 $\triangle ABC$ の外接円を S とする。辺 BC 上に点 P をとる。直線 AP と S との交点のうち、 A 以外の点を Q とする。 $BP = x$ として、以下の間に答えよ。

- (1) $\cos \angle ABC$ を求めよ。
- (2) $\triangle APB$ と $\triangle CPQ$ が相似であることを示せ。
- (3) PQ を x を用いて表せ。
- (4) $PQ > AP$ となるような x の値の範囲を求めよ。

5 関数 $f(x) = (x - 6)^2 + \frac{1}{4}(x^2 - 15)^2$ を考える。以下の問に答えよ。

- (1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。また、 $f'(-1)$ の値を求めよ。
- (2) 方程式 $f'(x) = 0$ を解け。
- (3) 関数 $f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。
- (4) xy 平面上に点 $A\left(6, \frac{15}{2}\right)$ と点 $P\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ をとる。 t が実数全体を動くとき、線分 AP の長さの最小値と、そのときの点 P の座標を求めよ。