

〔 I 〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

- (1) n は 3 以上の自然数とし、さいころを n 回続けて投げる試行を考える。 n 回目に 3 の目が出て、3 の目が出た回数がちょうど 3 回である確率は ア である。次に、 n 回目までに n 個の目の積が偶数である確率は イ であり、4 の倍数である確率は ウ である。また、 n 回目までに n 個の目の最大値が 4 である確率は エ である。最後に、 n 回目までに n 個の目の最大値と最小値の差が 3 となる確率は オ である。

- (2) i を虚数単位とし、 $\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3 - \sqrt{3}i}$ とおく。 α の偏角 θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で求めると、 $\theta =$ カ である。この α を用いて、複素数 z_n を $z_1 = \sqrt{2} + (2\sqrt{3} - \sqrt{6})i$, $z_{n+1} = \alpha z_n + z_1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定める。この z_{n+1} と z_n の間の関係式を $z_{n+1} - \gamma = \alpha(z_n - \gamma)$ と変形する。ここで $\gamma = \frac{z_1}{1 - \alpha}$ であり、 γ の虚部の値は キ である。また、これを用いて z_n を n の式で表すと $z_n = \alpha^{n-1}(z_1 - \gamma) + \gamma$ となる。次に、複素数平面上の点 $C(\gamma)$, $P_n(z_n)$, $P_{n+1}(z_{n+1})$ から定まる三角形 CP_nP_{n+1} の面積を S_n とする。 $S_1 =$ ク であり、 S_n を n を用いて表すと $S_n =$ ケ である。さらに、 $\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)S_k$ の値は コ である。

〔 II 〕 xyz 空間に 4 点 $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(2, 2, 0)$ をとる。また、点 P は線分 BC 上を動き、 $BP : PC = t : (1 - t)$ ($0 < t < 1$) とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標を t を用いて表せ。
- (2) 点 A から線分 BC に下ろした垂線を AR とする。点 R の座標を求めよ。また、線分 AR の長さを求めよ。
- (3) 点 $E(p, q, 0)$ は xy 平面上にあり、 $q < 0$ とする。さらに、直線 ER と直線 BC は垂直に交わり、線分 ER と線分 AR は長さが等しいとする。このとき、点 E の座標を求めよ。
- (4) 線分 AP と線分 PD の長さの和の最小値を求めよ。また、そのときの点 P の座標を求めよ。

〔Ⅲ〕 数列 $\{a_n\}$ と、その初項から第 n 項までの和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は、次の条件を満たしている。

$$a_1 = 2, \quad 3a_{n+1} = S_n(1 - 2S_{n+1}) + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) a_2, S_2 の値を求めよ。
- (2) S_{n+1} は、ある既約な分数式 $f(x)$ を用いて $S_{n+1} = f(S_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と表される。このとき、 $f(x)$ を求めよ。
- (3) 定数 r, β は $r \neq 0, r \neq 1, \beta \neq 1$ とする。(2) で求めた $f(x)$ に対して、分数式 $g(x) = \frac{x+1}{\beta x+1}$ は条件 $f(g(x)) = g(rx)$ を満たす。このとき、 r, β の値を求めよ。
- (4) (3) で求めた $g(x)$ に対して、数列 $\{T_n\}$ は条件 $g(T_n) = S_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たす。このとき、 $\{T_n\}$ の一般項を求めよ。
- (5) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{T_n}$ を求めよ。

〔Ⅳ〕 c を実数として、 $f(x) = \log x$ ($x > 0$), $g(x) = x^2 + c$ とおく。また、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(p, f(p))$ ($p > 0$) における接線を l_p とする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、必要ならば $\lim_{t \rightarrow +0} t(\log t)^2 = 0$ であることを証明なしに用いてよい。

- (1) 関数 $y = \log x + \frac{1}{4x^2}$ ($x > 0$) の増減を調べ、その極値を求めよ。
- (2) 接線 l_p の方程式を求めよ。
- (3) $c = c_0$ のとき、 l_p が曲線 $y = g(x)$ に接するような p がただ1つ存在するという。このような c_0 の値を求めよ。
- (4) $c > c_0$ のとき、 l_p が曲線 $y = g(x)$ に接するような p が2つ存在する。その2つの p の値を p_1, p_2 ($0 < p_1 < p_2$) とする。 $p = p_1$ に対する接線 l_{p_1} と曲線 $y = f(x)$, および直線 $x = a$ ($0 < a < p_1$) で囲まれた部分が x 軸の周りに1回転してできる立体の体積を $V_1(a)$ とするとき、 $\alpha = \lim_{a \rightarrow +0} V_1(a)$ を p_1 を用いて表せ。
- (5) $p = p_2$ に対する接線 l_{p_2} と曲線 $y = f(x)$, および y 軸と $y = -b$ ($b > 0$) で囲まれた部分が y 軸の周りに1回転してできる立体の体積を $V_2(b)$ とし、 $\beta = \lim_{b \rightarrow \infty} V_2(b)$ とおく。この β と (4) の α の比の極限值 $\lim_{c \rightarrow c_0+0} \frac{\alpha}{\beta}$ を求めよ。